Lorentz破缺的时空几何

薛迅、张磊，华东师范大学

2010年4月18日 南昌大学
高能物理学会第八届全国代表大会

背景介绍

- 局部Lorentz不变与CPT不变一起，是所有现代物理学的基础。而当今物理实验对这两者的破缺程度给出了很严格的限制。
- 06年，Cohen与Glashow提出了Lorentz破缺图景下的物理图像。他们给出了三个从Lorentz群破缺得到的子群，作为时空的局部对称群：E(2)、HOM(2)与SIM(2)。
- 这些子群如果加上P、T、CT或TC就成为洛伦兹群。

- 如果CP是严格对称性，非常狭义相对论（VSR)就变成了狭义相对论(SR)。VSR可能与CP破坏有关。
- E(2)群作为时空局部对称群时能有不变4-矢（刺矢，Spurion），而在HOM(2)与SIM(2)群中则没有
- 07年，Gibbons、Gomis和Pope提出了基于SIM(2)群作为时空局部对称群的时空图景，而这种时空图景就是Finsler几何。

- Gibbons等人的做法：考虑到可能的量子修正，可以将SIM(2)群与四维时空平移群的半直积群ISIM(2)群做形变（deform），从而得到DISIM(2)群，该群允许Spurion作为不变4-矢，但作为代价，时空将不再是平常的Riemann几何，而是Finsler几何

$$ds^2 = \left(\eta_{\mu\upsilon} dx^\mu dx^\upsilon\right)^{1-b} \left(n_\mu dx^\mu\right)^{2b}$$

- 从DISIM(2) 不变的Finsler线元可构造DISIM(2)不变的点粒子Lagrangian，构造正则动量，进行正则量子化，得到推广的Klein-Gordon方程，电磁场和Dirac Lagrangian等
- 以太漂移实验限制形变参数 $|b| < 10^{-10}$ ，惯性各向异性极限给出 $|b| < 10^{-26}$

Finsler几何简介

- Finsler度规 $g_{\mu\upsilon}=\frac{1}{2}\dot{\partial}_{\mu}\dot{\partial}_{\upsilon}F^{2}$ $\hat{\partial}_{\mu}$ 表示 $\partial/\partial x^{\mu}$ ，$\dot{\partial}_{\mu}$表示 $\partial/\partial y^{\mu}$ ，F满足 $F\left(x^{\mu},\lambda dx^{\mu}\right)=\lambda F\left(x^{\mu},dx^{\mu}\right)$ ，定义在底流形M的切丛TM上，y^{μ} 为切空间坐标。
- Finsler非线性联络 N_{υ}^{μ} ：

在Finsler流行上做坐标变换：$\begin{cases}x'^{\mu}=x'^{\mu}\left(x\right)\\ y'^{\mu}=y'^{\mu}\left(x,y\right)\end{cases}$ ，
坐标基矢的变换性质：

$$\begin{cases}\hat{\partial}'_{\mu}=\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\hat{\partial}_{\alpha}+\dfrac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\,\partial x'^{\upsilon}}y'^{\upsilon}\,\dot{\partial}_{\alpha}\\ \dot{\partial}'_{\mu}=\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\dot{\partial}_{\alpha}\end{cases}$$

- 可见 $\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}$ 依然是一个好的切空间基矢定义，但 $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 不再是底流形上好的基矢定义。为此，我们引入新的微分算符 $\frac{\delta}{\delta x^{\mu}}$ 为：$\delta_{\mu}=\frac{\delta}{\delta x^{\mu}}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-N_{\mu}^{\upsilon}\frac{\partial}{\partial y^{\upsilon}}$

其中 N_{μ}^{υ} 就是Finsler非线性联络：

$$N_{\mu}^{\upsilon}=\frac{1}{2}y^{\alpha}y^{\beta}\dot{\partial}_{\mu}\gamma_{\alpha\beta}^{\upsilon}+\gamma_{\mu\alpha}^{\upsilon}y^{\alpha}$$

- 这里 $\gamma_{\alpha\beta}^{\mu}=\frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}\left(\hat{\partial}_{\alpha}g_{\beta\upsilon}+\hat{\partial}_{\beta}g_{\alpha\upsilon}-\hat{\partial}_{\upsilon}g_{\alpha\beta}\right)$ 是第二类克氏符号
- 有了流形上的良好定义的坐标基矢 δ_{μ} ，以及对偶基矢：$\left\{dx^{\mu},\delta y^{\mu}=dy^{\mu}+N_{\upsilon}^{\mu}dx^{\upsilon}\right\}$ ，就可以构造熟悉的各种几何量了

:

- 与度规适配的协变微分必须保证度规的协变微分为零

$$\hat{\nabla}_{\alpha} g_{\mu\upsilon} = \dot{\nabla}_{\alpha} g_{\mu\upsilon} = 0$$

$$\begin{cases} \delta_{\alpha} g_{\mu\upsilon} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\upsilon} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\upsilon\alpha} g_{\mu\beta} = 0 \\ \dot{\partial}_{\alpha} g_{\mu\upsilon} - \dot{\Gamma}^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\beta\upsilon} - \dot{\Gamma}^{\beta}_{\upsilon\alpha} g_{\mu\beta} = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\partial}_{\alpha} g_{\mu\upsilon} = \dot{\partial}_{\mu} g_{\upsilon\alpha} = \dot{\partial}_{\upsilon} g_{\alpha\mu}$$

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\upsilon} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\delta_{\mu} g_{\rho\upsilon} + \delta_{\upsilon} g_{\rho\mu} - \delta_{\rho} g_{\mu\upsilon} \right) \\ \dot{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\upsilon} = C^{\sigma}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \dot{\partial}_{\rho} g_{\mu\upsilon} \end{cases}$$

其中 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\upsilon}$ 是流形上的联络，而 $C^{\sigma}_{\mu\upsilon}$ 是切空间的联络。

利用联络来给出相应的Riemann曲率张量与Ricci曲率张量等

- 在Finsler几何中，Minkowski流形就是一类其度规与底流形坐标无关，完全只是切空间坐标的函数的流形，从而非线性联络为零，进而Minkowski流形的所有联络恒为零，Minkowski流形的曲率张量也就恒为零，所以Finsler-Minkowski流形是平直流形。

不变度量

- Finsler流形上具有对称群L，则其不变度量F就是在L的作用下不发生改变的度量函数。

$F\left(R\left(\theta,x^{\alpha}\right)^{\mu},R'\left(\theta,y^{\beta}\right)^{\upsilon}\right)=F\left(x^{\mu},y^{\upsilon}\right)$ 其中 $R\left(\theta\right)_{\mu}^{\upsilon}\in L$ 是群元。

对无穷小群变换 $x^{\mu}+\theta\phi_{\alpha}^{\mu}x^{\alpha}+\theta\lambda^{\mu}$ ，F相应地满足

$$F\left(x^{\mu}+\theta\phi_{\alpha}^{\mu}x^{\alpha}+\theta\lambda^{\mu},y^{\upsilon}+\theta\phi_{\beta}^{\upsilon}y^{\beta}\right)=F\left(x^{\mu},y^{\upsilon}\right)$$

对于Minkowski流形，上式可以继续化简为：

$y^{\sigma}y^{\rho}\phi_{\sigma}^{\upsilon}g_{\upsilon\rho}=0$ 这里 $F=\sqrt{g_{\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$

形变群

- 设群对应的李代数具有对易关系 $\left[T_i,T_j\right]=C_{ij}^k T_k$ ，其形变李代数便是具有如下形式对易关系的李代数：$\hat{C}_{ij}^k=C_{ij}^k+tA_{ij}^k+t^2B_{ij}^k+\dots$ ，这里t为形变参数，表征了形变的大小
- Jacobi恒等式要求：$t\left(A_{l[k}^m C_{ij]}^l+C_{l[k}^m A_{ij]}^l\right)+t^2\left(A_{l[k}^m A_{ij]}^l+B_{l[k}^m C_{ij]}^l+C_{l[k}^m B_{ij]}^l\right)+\dots=0$
- 对t每一阶有 $\begin{cases} A_{l[k}^m C_{ij]}^l+C_{l[k}^m A_{ij]}^l=0 \\ A_{l[k}^m A_{ij]}^l+B_{l[k}^m C_{ij]}^l+C_{l[k}^m B_{ij]}^l=0 \\ \dots \end{cases}$

- 非平庸形变：要求形变后李代数与原始李代数不同构，那就要求不存在一个一般李代数矢量空间中的坐标变换，$S_\mu^\upsilon = \delta_\mu^\upsilon + t\phi_\mu^\upsilon + \ldots \in GL(n)$ 使得 $\hat{C}_{ij}^k = S_c^k C_{ab}^c \left(S^{-1}\right)_i^a \left(S^{-1}\right)_j^b$

即 $A_{ij}^k = \phi_l^k C_{ij}^l - C_{lj}^k \phi_i^l - C_{il}^k \phi_j^l$

Lorentz群的子群

- Lorentz群的李代数有6个生成元，分别是三个转动（r_x、r_y、r_z）与三个赝转动（b_x、b_y、b_z）
- 在同构的意义下有如下不同的李子代数：
- 1，单生成元子代数
- 2，两个二生成元：$\mathbf{span}\{r_x, b_x\}, \mathbf{span}\{r_x + b_y, b_z\}$ 对易关系为：$\mathbf{span}\{r_x, b_x\}:\qquad [r_x, b_x] = 0$

$$\mathbf{span}\{r_x + b_y, b_z\}:\qquad [b_x + r_y, b_z] = b_x + r_y$$

二维平移群 $\mathbf{t}(2) = \mathbf{span}\{t_1, t_2\}$ 与 $\mathbf{span}\{r_x, b_x\}$ 同构

- 3，四个三生成元子代数：$\mathbf{span}\{r_x,r_y,r_z\},\mathbf{span}\{b_x,b_y,r_z\}$ $\mathbf{span}\{t_1,t_2,r_z\},\mathbf{span}\{t_1,t_2,b_z\}$，其中 $t_1=b_x+r_y, t_2=b_y-r_x$，对易关系为：

$\mathbf{span}\{r_x,r_y,r_z\}$: $[r_x,r_y]=r_z$, $[r_y,r_z]=r_x$, $[r_z,r_x]=r_y$

$\mathbf{span}\{b_x,b_y,r_z\}$: $[b_x,b_y]=-r_z$, $[b_y,r_z]=b_x$, $[r_z,b_x]=b_y$

$\mathbf{span}\{t_1,t_2,r_z\}$: $[t_1,t_2]=0$, $[r_z,t_1]=t_2$, $[r_z,t_2]=-t_1$

$\mathbf{span}\{t_1,t_2,b_z\}$: $[t_1,t_2]=0$, $[b_z,t_1]=-t_1$, $[b_z,t_2]=-t_2$

- 4，一个四生成元的李子代数：$\mathbf{span}\{t_1,t_2,r_z,b_z\}$

对易关系为：$[t_1,t_2]=[r_z,b_z]=0$

$$[r_z,t_1]=t_2,\quad [r_z,t_2]=-t_1$$

$$[b_z,t_1]=-t_1,\quad [b_z,t_2]=-t_2$$

- 三生成元的李子代数中，第一个为so(3)李代数，第二个则是2+1时空中的Lorentz李代数，第三个则可以看作2维类空平面上的转动与平移变换构成的二维欧拉群E(2)对应的李代数e(2)，第四个是2维类空平面上的平移与缩放构成的二维保定向相似变换群HOM(2)对应的李代数hom(2)。其中，非平庸的只有e(2)与hom(2)两个李子代数。
- 四生成元的李子代数，则是二维空间中的平移、转动与缩放构成的相似变换群SIM(2)对应的李代数sim(2)。
- Lorentz群的子群，会与平移群半直积生成相应的时空对称群。

Poincare群子群的形变群

- 只考虑Lorentz群的子群SL与平移群T(4)的半直积群这类子群。
- 对于这类子群，其形变群也有两大类
- 第一类，是Lorentz群子群SL的形变群dSL与T(4)的半直积群，称为局部形变群
- 第二类，不能表达为第一类这种半直积群，是整体形变群。第二类还能细分为两类：一类整体形变群中，Lorentz子群部分不发生改变，而第二类整体形变群则连这部分也会发生改变。

形变群生成元表示的微扰法求解

- 形变群的李代数生成元一般形式上都比较复杂，无法很直观地由原Poincare表示的5×5矩阵形式来获得。但是，由于形变群可以看作是原始群的微扰形变，所以形变群生成元的表示也应该是原始群对应生成元表示的某种微扰。
- 假定原始群的生成元为$\{T_i\}$，则形变群的生成元可以写为：$\{T'_i = T_i + \tau G_i\}$ 相应的结构常数为：$C'^k_{ij} = C^k_{ij} + tA^k_{ij}$

$$\because C_{ij}^{k}T_{k}=\left[T_{i},T_{j}\right],C'^{k}_{ij}T'_{k}=\left[T'_{i},T'_{j}\right]$$

- 从而有 $\therefore X=\tau^{2}\left[G_{i},G_{j}\right]+\tau\left(\left[G_{i},T_{j}\right]+\left[T_{i},G_{j}\right]-C_{ij}^{k}G_{k}-tA_{ij}^{k}G_{k}\right)-tA_{ij}^{k}T_{k}=0$
- 其中，原始生成元T与生成元形变部分G都是5×5矩阵，i、j、k等都是生成元指标而非矩阵指标。显然这里未知数就是矩阵组G，而且矩阵组G的所有矩阵元应该都是形变系数t的函数，当t为零时矩阵组G应该都恒为零。
- 对于N个生成元的李代数，有N×5×5=25N个未知量，这个数目非常巨大，比如对Lorentz群来说就有200个未知量，而对于SIM群则有175个，HOM群为150个，数量非常庞大。而上面方程是二次方程，并且只有$\frac{N\left(N-1\right)}{2}$个独立方程，远不能将未知数都确定下来。

从微扰法的角度来进行求解

- 将 t微扰展开为：$t = t_0 + t_1\tau + t_2\tau^2$
- 可得到微扰方程组：$$\begin{cases} \left[G_i, G_j\right] - tA_{ij}^k G_k - rA_{ij}^k T_k = 0 \\ \left[G_i, T_j\right] + \left[T_i, G_j\right] - C_{ij}^k G_k - tA_{ij}^k T_k = 0 \\ rA_{ij}^k G_k = 0 \end{cases}$$

这里 $t = t_1, r = t_2$

- 还有更复杂的另一类微扰：将 A_{ij}^k 做微扰展开：$tA_{ij}^k = \hat{A}_{ij}^k + \tau\overline{A}_{ij}^k + \tau^2\tilde{A}_{ij}^k$
- 得到微扰方程组：$$\begin{cases} \left[G_i, G_j\right] - \overline{A}_{ij}^k G_k - \tilde{A}_{ij}^k T_k = 0 \\ \left[G_i, T_j\right] + \left[T_i, G_j\right] - C_{ij}^k G_k - \overline{A}_{ij}^k T_k = 0 \\ \tilde{A}_{ij}^k G_k = 0 \end{cases}$$

- 在一般的情况下，会发现一个确定的李代数的往往可以具有多种不等价的自然矩阵表示，每一种矩阵表示，可以对应一种时空不变度量，因而同一时空对称群（包括其形变）可以对应不同的时空几何结构。

Lorentz群的形变群（形变群表示与平移群的半直积群的形变群）

- Lorentz群与平移群的半直积群为Poincare群，容易验证， Lorentz群的形变群是唯一的，且具有如下对易关系：

$$\left[r_i, r_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} r_k \qquad \left[b_i, b_j\right] = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} r_k \qquad \left[b_i, r_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} b_k$$

$$\left[r_i, p_t\right] = 0 \qquad \left[r_i, p_j\right] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} p_k \qquad \left[b_i, p_t\right] = p_i \qquad \left[b_i, p_j\right] = \delta_{ij} p_t$$

$$\left[p_t, p_i\right] = t b_i \qquad \left[p_i, p_j\right] = -t \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} r_k$$

- 这就是de Sitter群，形变后的生成元的表示也是唯一的

Lorentz群子群的形变群

子代数	分类	子类	矩阵表示数	说明
Lorentz	de Sitter	de Sitter	1	最大对称空间
sim	disim (sim不变)	disim	1	可以有不同的线性组合形式 转动算符有缩放性质 Boost算符有缩放性质
	xdisim1 (sim改变)	xdisim1	1	可以有不同的线性组合形式 转动算符有缩放性质 Boost算符有缩放性质
	xdisim2 (sim改变)	xdisim2	1	转动算符有缩放性质 Boost算符有缩放性质

hom	dihom1 (wdisim)	dihom1 (wdisim)	1	可以有不同的线性组合形式 Boost算符有缩放性质 结构与disim相关部分相同
	dihom2 (dihom)	dihom2 (dihom)	1	不能写成完全的Poincare型矩阵表示 Boost算符有缩放性质
e(2)	dte1	dte1	1	转动算符有缩放性质
	dte2	dte2a	2	平移算符伴随着t1、t2算符一起作用
		dte2b	0	无微扰且能退化到未形变矩阵表示的矩阵表示
	dte3	dte3a	2	平移算符伴随着t1、t2算符一起作用
		dte3b	1	平移算符伴随着t1、t2算符一起作用 转动算符不仅仅有xy平面转动，也包含了tz平面的转动

so(3)	diso(3)1	diso(3)1	1	形变参量的正负选择将给出不同的矩阵表示形式
	diso(3)2	diso(3)2	3	三种矩阵表示各不相同
so(2,1)	diso(2，1)1	diso(2，1)1	1	形变参量的正负选择将给出不同的矩阵表示形式
	diso(2，1)2	diso(2，1)2	2	两种矩阵表示各不相同

Lorentz群各子群及形变群所对应的Finsler时空

<table>
<tr><td rowspan="2">对称群</td><td>共形协变张量</td><td>共形因子</td></tr>
<tr><td colspan="2">不变度量与附加说明</td></tr>
<tr><td>de Sitter</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Lorentz</td><td>$G_{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2 = G_{\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">DISIM</td><td>$N_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$</td><td>$B_z(\theta) \; : \; e^{(1+A_2)\theta}$</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>$B_z(\theta) \; : \; e^{2A_1\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2 = \left(G_{\mu\upsilon} y^{\mu} y^{\upsilon}\right)^{1+A_2} \left(N_{\mu} y^{\mu}\right)^{-2A_2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">XDISIM1</td><td>N_{μ}</td><td>$B_z(\theta) \; : \; e^{(1+A_3)\theta}$</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>$B_z(\theta) \; : \; e^{2(A_3-A_1)\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2 = \left(G_{\mu\upsilon} y^{\mu} y^{\upsilon}\right)^{\frac{1+A_3}{1+A_1}} \left(N_{\mu} y^{\mu}\right)^{-2\frac{A_3+A_1}{1+A_1}}$

$A_1 = -1$ 时无不变度量</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">XDISIM2</td><td>N_{μ}</td><td>$B_z(\theta)$: $e^{(1+A_3)\theta}$</td></tr>
<tr><td>$H_{(M,N)\mu\upsilon}$
其中 $M=-\frac{1+A_3}{1+A_1}, N=\frac{A_1-A_3}{1+A_1}$</td><td>$B_z(\theta)$: $e^{2(A_3-A_1)\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2=\left(H_{(M,N)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}\right)^{\frac{1+A_3}{1+A_1}}\left(N_{\mu}y^{\mu}\right)^{-2\frac{A_3-A_1}{1+A_1}}$
与DISIM相比，做了一个t-z坐标轴的非正交线性组合</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ISIM</td><td>N_{μ}</td><td>$B_z(\theta)$: e^{θ}</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2=G_{\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>DIHOM</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td>WDIHOM</td><td colspan="2">与DISIM情况相同</td></tr>
<tr><td>IHOM</td><td colspan="2">与SIM情况相同</td></tr>
<tr><td>DTE1</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td rowspan="3">DTE2a1</td><td>N_μ</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>$P_t(\theta)$、$P_z(\theta) : e^{A_2\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F = N_\mu y^\mu$
两个形变参量的关系：$A_1 = A_2^2 / 4$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">DTE2a2</td><td>N_{μ}</td><td>$P_t(\theta)$、$P_z(\theta)$：$e^{(2\lambda-A_2)\theta}$</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>$P_t(\theta)$、$P_z(\theta)$：$e^{2\lambda\theta}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2=\left(G_{\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}\right)^{\frac{A_2-2\lambda}{A_2-\lambda}}\left(N_{\mu}y^{\mu}\right)^{\frac{2\lambda}{A_2-\lambda}}$
形变参数要求：$\lambda^2-A_2\lambda+A_1=0$ 且 $\lambda\neq A_2$</td></tr>
<tr><td>DTE2b</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td>DTE3a</td><td colspan="2">与DTE2a情况相同</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">DTE3b</td><td>N_μ</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$G_{\mu\upsilon}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^2=\left(G_{\mu\upsilon}y^\mu y^\upsilon\right)^{1-A}\left(N_\mu y^\mu\right)^{2A}$

A是自由参量
且形变参量　$A_1=0$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">TE(2)</td><td>$$H_{(a,b)\mu\upsilon}=\begin{pmatrix} a & & & a+b \\ & b & & \\ & & b & \\ a+b & & & a+2b \end{pmatrix}$$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$F^2=\prod_{a,b}\left(H_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}\right)^{D_{a,b}}$$
系数限制条件为 $\sum_{a,b} D_{a,b}=1$</td></tr>
<tr><td>DISO(3)1</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td>DISO(3)2</td><td colspan="2">无</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">ISO(3)</td><td>$T_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$G_{(a,b)\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & b \end{pmatrix}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$F^2 = \left(T_\mu y^\mu\right)^A \prod_{a,b} \left(G_{(a,b)\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon\right)^{B_{a,b}}$$
参数限制条件为：$A + 2\sum_{a,b} B_{a,b} = 2$</td></tr>
<tr><td>DISO(2,1)1</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td>DISO(2,1)2</td><td colspan="2">无</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">ISO(2, 1)</td><td>$X_{\mu}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}=\begin{pmatrix}a &&& \\ & b && \\ && -a & \\ &&& -a\end{pmatrix}$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td colspan="2">$F^{2}=\left(X_{\mu}y^{\mu}\right)^{A}\prod_{a,b}\left(\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}\right)^{B_{a,b}}$
参数限制条件为：$A+2\sum_{a,b}B_{a,b}=2$</td></tr>
</table>

- Lorentz群的子群与平移群的半直积群的形变群作用下不变的度量函数都可以写成这种形式： $F^2=\left(A_\mu y^\mu\right)^{2-2\sum_{a,b}D_{a,b}}\prod_{a,b}\left(B_{(a,b)\mu\upsilon}y^\mu y^\upsilon\right)^{D_{a,b}}$
  其中，刺矢 A_μ 可以取 N_μ、T_μ 和 X_μ，而 $B_{(a,b)\mu\upsilon}$ 则可以取 $G_{(a,b)\mu\upsilon}$、$\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}$ 和 $H_{(a,b)\mu\upsilon}$。对于不同的群，上述取法不同。常见的有：

$$F^2=G_{\mu\upsilon}y^\mu y^\upsilon$$

$$F^2=\left(N_\mu y^\mu\right)^2$$

$$F^2=\left(G_{\mu\upsilon}y^\mu y^\upsilon\right)^{1-A}\left(N_\mu y^\mu\right)^{2A}$$

- 未形变的群中，ISIM作用不变的只有Minkowski度规，而TE(2)、ISO(3)和ISO(2,1)作用不变的度量函数则都是形变后形式的，其中 A_μ 分别为 N_μ、T_μ 和 X_μ，而 $B_{(a,b)\mu\upsilon}$ 则分别是 $H_{(a,b)\mu\upsilon}$、$G_{(a,b)\mu\upsilon}$ 和 $\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}$。

更多形式的度量函数

- 度量函数还可以有更加丰富的结构。
- 如果存在某个标量函数 $\phi\left(y^{\mu}\right)$ ，是 y^{μ} 的零阶齐次函数且在群作用下不变，那么 ϕ的任意函数与上面给出的度量函数的积也可以作为群作用不变的度量函数，比如：

$$F^{2}=G_{\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}\cos\left(\omega\frac{T_{\mu}y^{\mu}}{X_{\mu}y^{\mu}}+\theta\right)$$

这种形式的度量函数在只具有yz平面转动对称性的时空中是允许的

Lorentz各种子群及形变群的作用不变零阶函数

对称群	群作用不变的零阶齐次函数 ϕ
DISIM	$\phi = 1$
XDISIM1	$\phi = 1$
XDISIM2	$\phi = 1$
ISIM	$\phi = 1$
DTE2a1	$\phi = 1$
DTE2a2	$\phi = 1$
DTE3b	$\phi = \frac{\left(N_{\mu} y^{\mu}\right)^2}{G_{\mu\upsilon} y^{\mu} y^{\upsilon}}$

TE(2)	$$\phi_{a,b;c,d}=\frac{H_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}{H_{(c,d)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$$	
ISO(3)	$$\phi_{a,b}=\frac{\left(T_{\mu}y^{\mu}\right)^{2}}{G_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$$	$$\phi_{a,b;c,d}=\frac{G_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}{G_{(c,d)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$$
ISO(2, 1)	$$\phi_{a,b}=\frac{\left(X_{\mu}y^{\mu}\right)^{2}}{\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$$	$$\phi_{a,b;c,d}=\frac{\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}{\tilde{G}_{(c,d)\mu\upsilon}y^{\mu}y^{\upsilon}}$$

- 对于DTE3b、TE(2)、ISO(3)、ISO(2,1)这四个群，其不变度量可以取如下形式：

$$
\begin{cases}
\text{DTE3b}: & F^2 = \left(G_{\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon\right)^{1-A} \left(N_\mu y^\mu\right)^{2A} S\left(\phi_{\text{DTE3b}}\right) \\
\text{TE}(2): & F^2 = \prod_{a,b} \left(H_{(a,b)\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon\right)^{D_{a,b}} S\left(\phi_{\text{TE}(2)a,b;c,d}\right) \\
\text{ISO}(3): & F^2 = \left(T_\mu y^\mu\right)^A \prod_{a,b} \left(G_{(a,b)\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon\right)^{B_{a,b}} S\left(\phi_{\text{ISO}(3)a,b}; \phi_{\text{ISO}(3)a,b;c,d}\right) \\
\text{ISO}(2,1): & F^2 = \left(X_\mu y^\mu\right)^A \prod_{a,b} \left(\tilde{G}_{(a,b)\mu\upsilon} y^\mu y^\upsilon\right)^{B_{a,b}} S\left(\phi_{\text{ISO}(2,1)a,b}; \phi_{\text{ISO}(2,1)a,b;c,d}\right)
\end{cases}
$$

- 这里 S是任意函数，且对于TE(2)、ISO(3)、ISO(2,1)而言，$S(\ldots)$ 的宗量是所有可能的$\phi_{a,b;c,d}$与$\phi_{a,b}$。可见，现在上述四个群的不变度量具有相当丰富的形式。

结论

- Lorentz各类三生成元、四生成元的子群及其形变群所对应的Finsler-Minkowski几何的度量函数已经全部给出。
- 按Gibbons-Gomis-Pope的方案，即可研究各种情形下，单粒子动力学、标量场、矢量场和旋量场的动力学，以及可能的试验验证。

谢谢！